Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение
«Средняя общеобразовательная школа №54», г. Барнаула

Принята на педагогическом Совете №1 25.08.2023 г.	Согласовано с и.о. зам. директора по УВР Парамоновой О.А.	Утверждаю Директор С.Ю. Полянский Приказ от 25.08.2023 №270-осн.

Рабочая программа
элективного курса «Решение уравнений и неравенств с параметрами»
для 11 класса

Составлена на основе рабочей программы Айвазян Д.Ф. Математика. 10 – 11 классы. Решение уравнений и неравенств с параметрами: элективный курс / авт.-сост. Д.Ф. Айвазян. – Волгоград: Учитель, 2011.

на 2023-2024 учебный год

Составитель:
Емельянова Ольга Ивановна,
учитель математики
высшей квалификационной категории

Барнаул 2023

I. ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

1. Общие положения

Настоящая рабочая программа элективного курса для 11 класса разработана на основе:
- Учебного плана МБОУ «СОШ №54» г. Барнаула на 2023-2024 учебный год.
- Основной образовательной программы ФГОС МБОУ «СОШ № 54»;
- Положения «О рабочей программе учебных предметов, курсов» МБОУ «СОШ №54»».- Авторской программы по учебному предмету элективного курса: Айвазян Д.Ф. Математика. 10 – 11 классы. Решение уравнений и неравенств с параметрами: элективный курс / авт.-сост. Д.Ф. Айвазян. – Волгоград: Учитель, 2011.
- Учебников: Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. В 2 ч. Ч.1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень)/ А.Г.Мордкович, П.В.Семёнов. – 6-е изд. стер. – М.: Мнемозина, 2012. – 287 с.

Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. В 2 ч. Ч.1. Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень)/ (А.Г.Мордкович и др.) под ред. А.Г. Мордковича. – 4-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2012. – 264 с.

Геометрия, 10—11: Учеб. Для общеобразоват. Учреждений: базовый и профильный уровни / Л.С. Атанасян, В.Ф.Бутузов, С.Б.Кадомцев и др. 16-е изд. – М.: Просвещение, 2011.- 256 с.

2. Место предмета в учебном плане

Согласно учебному плану школы на изучение элективного курса в 11 классе отводится 1 час в неделю. В соответствии с календарным учебным графиком в учебном году 34 недели.

Класс	11
Кол-во часов в неделю	1
Кол-во часов за учебный год	34

3. Цели и задачи изучения предмета

Элективный курс «Решение уравнений и неравенств с параметрами» предметно-ориентирован и предназначен для углубления математических знаний учащихся 11 класса общеобразовательной школы.

Практика работы в школе показывает, что задачи с параметрами представляют для школьников наибольшую трудность, как в логическом, так и техническом плане, поэтому уравнения и неравенства с параметрами – это один из труднейших разделов школьного курса математики. Задачи с параметрами – это задачи, в которых проверяется техника владения знаниями элементарной математики, методами решения уравнений и неравенств, уровень логического мышления учащихся.

Данный элективный курс знакомит учащихся с методами решения алгебраических задач с параметрами. К сожалению, в школьной программе для общеобразовательных классов этим заданиям уделяется очень мало времени, не реализован системный подход в данной методической линии, и содержание курса призвано восполнить данный пробел. Одновременно, элективный курс позволяет не только дополнять и углублять знания учащихся, но и развивать их исследовательские умения, логическое мышление. Решение уравнений и неравенств с параметрами открывает перед учащимися значительное число эвристических приемов общего характера, ценных для математического развития, применяемых в исследованиях и задачах смежных предметных областей.

Цели элективного курса:

- Формирование у учащихся целостного представления о методах решения уравнений и неравенствах с параметрами.

- Развитие творческих способностей школьников при конструировании способов решения задач высокого уровня сложности.

Задачи элективного курса

- Обобщение и систематизация знаний школьников об уравнениях, системах уравнений, неравенствах и способах их решения.
- Формирование у учащихся методов решения уравнений и неравенств с модулями и параметрами.
- Формирование у школьников умения применять знания и умения из разных разделов курса математики для конструирования способа решения задачи в нестандартной ситуации.
- Формирование действий самоконтроля у слушателей курса
- Развитие логического мышления школьников.
- Воспитание рациональности и креативности мышления учащихся.

Формирование математических понятий и способов решения задач курса происходит на основе выявления опыта учащихся по решению соответствующего класса уравнений и неравенств, установления смысловых связей нового материала с ранее изученным. Актуализация всех имеющихся сведений по изучаемой проблеме позволяет создать условия для выхода на новый уровень её решения, который характеризуется повышением степени абстрактности и приобретением нового смысла основных понятий.

Важная роль в курсе отведена функционально – графическому методу решения уравнений и неравенств, так как его применение позволяет ученику привести «красивое» решение сложной задачи, комбинируя знания из разных разделов курса математики.

В Приложении 1 приведены примеры упражнений для анализа и конструирования способов решения задач по курсу.

Однообразие в этапах организации деятельности слушателей (актуализация знаний и умений по теме; анализ и схематизация новых способов решения; применение новых способов решения уравнений и неравенств в ходе самостоятельной работы, контроль и оценка решения задач, рефлексия деятельности) создаёт эффект предсказуемости деятельности и делает совместную работу учителя и ученика на занятии психологически комфортной. Освоение новых методов решения уравнений и неравенств происходит в диалоговом режиме, с использованием коллективных форм организации самостоятельной работы учащихся. Такая методика способствует выявлению сути проблем и более глубокому пониманию способов их решения. Разнообразие способов решения конкретной задачи в группе и их анализ позволяет развивать такие качества мышления школьников как креативность и рациональность.

Уровень усвоения методов решения задач курса проверяется на итоговом зачёте. Слушатели курса получают оценку «зачтено» при правильном решении 3 из 4 предложенных задач итогового зачёта (Приложение 2). Правильное решение задачи №4 итогового зачета свидетельствует о повышенном уровне освоения содержания элективного курса.

II. Планируемые результаты освоения учебного предмета

Ожидаемые результаты

Учащийся *должен знать*:

- понятие параметра;
- что значит решить уравнение с параметром, неравенство с параметром, систему уравнений и неравенств с параметром;
- основные способы решения различных уравнений, неравенств и систем уравнений и неравенств с параметром (линейных и квадратных);
- алгоритмы решений задач с параметрами;

- зависимость количества решений неравенств, уравнений и их систем от значений параметра свойства решений уравнений, неравенств и их систем;
- свойства функций в задачах с параметрами.
  Учащийся *должен уметь*:
- определять вид уравнения (неравенства) с параметром;
- выполнять равносильные преобразования;
- применять аналитический или функционально-графический способы для решения задач с параметром;
- осуществлять выбор метода решения задачи и обосновывать его;
- использовать в решении задач с параметром свойства основных функций;
- выбирать и записывать ответ;
- решать линейные, квадратные уравнения и неравенства; несложные иррациональные, тригонометрические, показательные и логарифмические уравнения и неравенства с одним параметром при всех значениях параметра.
  Учащийся *должен владеть:*
- анализом и самоконтролем;
- исследованием ситуаций, в которых результат принимает те или иные количественные или качественные формы.
  Изучение данного курса *дает учащимся возможность:*
- повторить и систематизировать ранее изученный материал школьного курса математики;
- освоить основные приемы решения задач;
- овладеть навыками построения и анализа предполагаемого решения поставленной задачи;
- познакомиться и использовать на практике нестандартные методы решения задач;
- повысить уровень своей математической культуры, творческого развития, познавательной активности;
- познакомиться с возможностями использования электронных средств обучения, в том числе Интернет-ресурсов;
- усвоить основные приемы и методы решения уравнений, неравенств, систем уравнений с параметрами;
- применять алгоритм решения уравнений, неравенств, содержащих параметр;
- проводить полное обоснование при решении задач с параметрами;
- овладеть исследовательской деятельностью.

Формы работы: лекционно-семинарская, групповая и индивидуальная.
Методы работы: исследовательский и частично-поисковый.
Виды деятельности на занятиях: лекция, беседа, практикум, консультация, работа с компьютером.

III. Содержание программы

Введение (2 ч)

Обобщение и систематизация представлений о типах рациональных уравнений и методах их решений. Линейное уравнение. Квадратное уравнение. Дробно-рациональное уравнение. Область определения уравнения.
Уравнения с параметрами. Параметр. Область допустимых значений параметра. Контрольное значение параметра. Решение уравнения с параметром. Решить уравнение с параметром.
Общая схема решения задач с параметром.

Тема 1. Линейные уравнения с параметрами (6 часа)

Линейные уравнения с параметрами. Алгоритм решения линейных уравнений с параметрами. Область допустимых значений и контрольные значения параметра в линейных уравнениях.

Решение линейных уравнений с параметрами. Ключевые моменты в решении уравнений с параметрами (выделение контрольных значений параметра; разбиение области допустимых значений параметра на подмножества; классификация решений уравнения с параметром).

Зависимость количества корней от коэффициентов a и b. Решение уравнений с параметрами при наличии дополнительных условий к корням уравнения. Решение уравнений, приводимых к линейным.

Тема 2. Квадратные уравнения с параметрами (6 часов)

Понятие квадратного уравнения с параметрами. Алгоритмическое предписание решения квадратных уравнений с параметрами. Зависимость количества корней уравнения от коэффициента *a* и дискриминанта. Область допустимых значений и контрольные значения параметра в квадратных уравнениях. Графический способ решения квадратных уравнений с параметром. Применение теоремы Виета при решении квадратных уравнений с параметром. Решение квадратных уравнений при дополнительных условиях к корням уравнений. Расположение корней квадратного трехчлена относительно заданной точки. Задачи, сводящиеся к исследованию расположения корней квадратного трехчлена.

Тема 3. Линейные неравенства с параметрами (6 часов)

Линейные неравенства с параметрами. Алгоритм решения линейных неравенств с параметрами. Область допустимых значений и контрольные значения параметра в линейных неравенствах.

Решение линейных неравенств с параметрами. Зависимость решений от коэффициентов a и b. Решение неравенств, приводимых к линейным.

Тема 4. Квадратные неравенства с параметрами (6 часов)

Понятие квадратного неравенства с параметром. Алгоритмическое предписание решения квадратных неравенств с параметрами. Зависимость решений от коэффициента *a* и дискриминанта. Графический способ решения квадратных неравенств с параметрами. Решение квадратных неравенств с параметрами при дополнительных условиях к корням соответствующих уравнений. Задачи, сводящиеся к исследованию расположения корней квадратного трехчлена. Решение квадратных неравенств с параметром методом интервалов. Решение неравенств с параметром, приводимых к квадратным.

Тема 5. Функционально-графические методы решения задач с параметрами (6 часа)

Специфика графического метода решения задач с параметрами. Решение линейных и квадратных неравенств с параметрами графическим методом. Использование графических иллюстраций в задачах с параметрами

Итоговый зачет по курсу (2часа)

Элективные курсы учебного плана, формируемые участниками образовательных отношений.

Элективные курсы компонента образовательного учреждение

Критерии оценки зачета/незачета

зачет	незачет
устная форма зачета	
выставляется, если обучающийся свободно, с глубоким знанием материала, правильно, последовательно представит содержание предмета (часть , раздел, блок тем) и ответит на дополнительные вопросы; если обучающийся	выставляется, если обучающийся только имеет очень слабое представление о предмете и недостаточно, или вообще не освоил содержание предмета. Допустил

достаточно убедительно, с несущественными ошибками в теоретической подготовке и достаточно освоенными умениями по существу правильно ответил на вопрос с дополнительными комментариями педагога или допустил небольшие погрешности в ответе.	существенные ошибки в ответе на большинство вопросов ситуационной задачи, неверно отвечал на дополнительно заданные ему вопросы, не может справиться с решением подобной ситуационной задачи на практике
письменная форма зачета	
При тестировании все верные ответы берутся за 100%, зачет ставиться при качестве выполнения 90-100%	При тестировании все верные ответы берутся за 100%, незачет ставиться при качестве выполнения 89% и менее

IV. Календарно-тематическое планирование

№	**Тема урока**	**Кол-во часов**
Введение (2 часа)		
1-2	Понятие уравнения с параметром. Рациональные уравнения с параметрами	2
Линейные уравнения с параметрами (6 часов)		
3-4	Линейные уравнения с параметрами.	2
5-6	Линейные уравнения с параметрами с дополнительными условиями для корней	2
7-8	Уравнения с параметром, приводимые к линейным	2
Квадратные уравнения с параметрами (6 часов)		
9-10	Квадратные уравнения с параметрами	2
11	Уравнения с параметрами, приводимые к квадратным	1
12	Решение квадратных уравнений с помощью теоремы Виета	1
13	Задачи, связанные с исследованием корней квадратного трехчлена	1
14	Задачи, связанные с исследованием корней квадратного трехчлена	1
Линейные неравенства с параметрами (6 часов)		
15-17	Линейные неравенства с параметрами	3
18-20	Линейные неравенства с параметрами и неравенства, приводимые к линейным.	3
Квадратные неравенства с параметрами (6 часов)		
21-23.	Квадратные неравенства с параметрами	3
24-26	Решение квадратных неравенств с параметрами методом интервалов	3
Функционально-графический метод решения задач с параметрами (6 часов)		
27-29	Функционально-графический метод решения задач с параметрами.	3
30-32	Функционально-графический метод решения задач с параметрами.	3
33-34	***Итоговый зачет по курсу.***	***2***
	Всего	***34***

V. Учебно-методическое обеспечение образовательного процесса

1. Айвазян, Д.Ф. Математика 10-11 классы. Решение уравнений и неравенств с параметрами. / авт-сост. Д.Ф. Айвазян.- Волгоград: Учитель, 2011.-204с.
2. Амелькин, В.В. Задачи с параметрами/ В.В. Амелькин, В.Л.Рабцевич.- М.:Асар,1996,504с.
3. Горнштейн П.И. и др. Задачи с параметрами. – М.: Илекса, Харьков: Гимназия, 2013.
4. Жаржевский А.Я., Фельдман Я.С. Математика. Решение задач с параметрами. С. – Петербург: Агенство ИГРЕК, 2015.
5. Изучение сложных тем курса алгебры в средней школе: учебно-методические материалы по математике /Под ред. Л.Я.Фальке. – М.: Народное образование; Илекса; Ставрополь: Сервисшкола, 2015
6. Карп А.П., Некрасов В.Б. Задания по алгебре и началам анализа для организации итогового повторения и проведения аттестации в 11 классе. – М.: Просвещение, 2013.
7. Мордкович А.Г. Беседы с учителями математики. – М.: Мир и Образование, 2015.
8. Полякова, Е.А. Уравнения и неравенства с параметрами в профильном 11 классе./ Е.А. Полякова .- М.: ИЛЕКСА, 2016.-96с.
9. Севрюков П.Ф., Смоляков А.Н. Уравнения и неравенства с модулями и методика их решения. – М.: Илекса, Народное образование; Ставрополь: Сервисшкола, 2015
10. Цыганов, Ш Квадратные трехчлены и параметры./ Ш.Цыганов.Математика.- 2017.-№5. с 4-9.

Образовательные ресурсы сети Интернет

http://ege.edu.ru
http://eqworld.ipmnet.ru
http://graphfunk.narod.ru
http://www.uztest.ru
http://www.it-n.ru
http://www.ed.vseved.ru
http://mat.1september.ru

VI. Материально-техническое обеспечение образовательного процесса

1. Классная доска с набором приспособлений для крепления таблиц, постеров и картинок
2. Мультимедийный проектор
3. Экспозиционный экран
4. Компьютер
5. Сканер
6. Принтер лазерный
7. Ученические двухместные столы с комплектом стульев
8. Шкафы для хранения учебников, дидактических материалов, пособий и др.
9. Наборы предметных картинок
10. Демонстрационный треугольник, линейка, циркуль.

Приложение 1. Упражнения для анализа способа решения уравнений и неравенств с параметрами.

Пример 1. Решите уравнение $a(a-5)x = 6(x-1)+a$.

Решение. Область допустимых значений параметра в данном уравнении $-R$.

Преобразуем данное уравнение к равносильному уравнению вида $f(a)\cdot x = =g(a)$:

$(a^2-5a-6)x = a-6,$

$(a-6)(a+1)x = a-6.$ (*).

Контрольные значения параметра : $a = -1;\ a = 6$.

Разобьём область значений параметра на подмножества: 1) $A_1 = \{-1\}$;

2) $A_2 = \{6\}$; 3) $A_3 = (-\infty; -1)U(-1;6)\ U\ (6; \infty)$ и решим уравнение (*) на каждом из подмножеств.

1) При $a=-1$ уравнение (*) не имеет корней;
2) При $a=6$ корнем уравнения (*) является любое действительное число;
3) При $\begin{cases} a\neq -1, \\ a\neq 6 \end{cases}$ уравнение (*) имеет единственный корень $x=\dfrac{1}{a+1}$.

Ответ. При $a=-1$ корней нет;

При $a=6$ $x\in R$;

При $\begin{cases} a\neq -1, \\ a\neq 6 \end{cases}$ $x=\dfrac{1}{a+1}$.

Пример 2. Решите уравнение

$ax^2+4ax+3 = x^2+2x-4.$

Решение. Область допустимых значений параметра в данном уравнении – R.

Преобразуем данное уравнение к равносильному уравнению вида

$$f(a)x^2 + g(a)x + h(a)=0:$$

$$(a-1)x^2+2(2a-1)x+(4a+3)=0 \qquad (*).$$

Найдём контрольные значения параметра a.

1) $f(a)=0$ при $a=1$.

2) Из области изменения параметра $a\neq 1$ выделим те значения, при которых дискриминант уравнения (*) обращается в нуль :

$\dfrac{D}{4}=(2a+1)^2-(a-1)(4a+3)$, $\dfrac{D}{4}=5a+4$.

$\dfrac{D}{4}=0$ при $5a+4=0$,

$a=-\dfrac{4}{5}$.

$-\dfrac{4}{5}$ – второе контрольное значение параметра. Разобьём область значений параметра на подмножества, учитывая выводы:

если $a<-\dfrac{4}{5}$, *то* $D<0$,

если $\begin{cases} a\geq -\dfrac{4}{5}, \\ a\neq 1, \text{ то } D\geq 0. \end{cases}$

$A_1 = (-\infty; -\dfrac{4}{5})$; $A_2 = [-\dfrac{4}{5}; 1)\ U\ (1;\infty)$, $A_3=\{1\}$.

Решим уравнение (*) на каждом из подмножеств A_1, A_2, A_3.

1) При $a < -\frac{4}{5}$ уравнение (*) не имеет действительных корней.

2) При $\begin{cases} a \geq -\frac{4}{5}, \\ a \neq 1 \end{cases}$ $\quad x_{1,2} = \frac{-(2a+1) \pm \sqrt{5a+4}}{a-1}$

3) При $a = 1$ уравнение (*) примет вид : $6x+7=0$,

$$x = -1\frac{1}{6}.$$

Ответ. При $a < -\frac{4}{5}$ корней нет;

При $a \in \left[-\frac{4}{5};1\right] \cup (1;\infty)$ $\quad x_{1,2} = \frac{-(2a+1) \pm \sqrt{5a+4}}{a-1}$;

При $a = 1$ $\quad x = -1\frac{1}{6}$.

Пример 3. Решите уравнение $\frac{x}{a(x+1)} - \frac{2}{x+2} = \frac{3-a^2}{a(x+1)(x+2)}$ (1).

Решение . Контрольным значением параметра будет $a=0$, не являющееся допустимым в данном дробно – рациональном уравнении. Следовательно, при $a=0$ данное уравнение не имеет корней.

Рассмотрим значения параметра $a \neq 0$ и преобразуем данное уравнение к виду
$f(a)x^2+ g(a)x+h(a)=0 : x^2+2(1-a)x+a^2-2a-3=0$ (2)

Уравнение (2) не является равносильным данному в силу изменения области допустимых значений переменной x, поэтому необходима проверка корней.
Найдём дискриминант уравнения (2) :

$\frac{D}{4} = (1-a)^2 - (a^2 - 2a - 3)$; $\quad \frac{D}{4} = 4$, поэтому другие контрольные значения параметра a, кроме $a=0$, в уравнении (2) не выявлены и оно имеет два действительных корня :
$x_1 = a+1; x_2 = a-3$.

Выполним проверку корней. Из найденных значений x следует исключить не входящие в область допустимых значений переменной :

$\begin{cases} x+1 \neq 0, \\ x+2 \neq 0, \end{cases}$ т.е. $x_1+1=0, x_1+2=0, x_2+1=0, x_2+2=0$.

1) $x_1+1 = 0$, т.е. $(a+1)+1=0, a= -2$.
При $a =-2$ x_1 не является корнем уравнения (1).
2) $x_1+2=0$, т.е. $(a+1)+2=0, a= - 3$.

При $a = -3$ x_1 не является корнем уравнения (1).
3) $x_2+1=0$, т.е. $(a-3)+1= 0, a=2$.
При $a= 2$ x_2 не является корнем уравнения (1).
4) $x_2+2=0$, т.е. $(a-3)+2=0, a=1$.
При $a= 1$ x_2 не является корнем уравнения (1).
Ответ. При $a= -3$ $x= - 6$;
При $a= -2$ $x= -5$;
При $a=0$ корней нет;

При $a=1$ $x = 2;$
При $a=2$ $x = 3;$
При $a \notin \{-3;-2;0;1;2\}$ $x_1 = a+1;\ x_2 = a-3.$

Пример 4. Решите неравенство $2a(a-2)x > a-2$.

Решение.

Контрольные значения параметра: $a=0;2$.

Рассмотрим данное неравенство в каждом из пяти случаев: 1) $a<0;$ 2) $a=0;$ 3) $0<a<2;$ 4) $a=2;$ 5) $a>2.$

1) При $a<0$ $2a(a-2)>0$, данное неравенство преобразуется к виду: $x>\frac{a-2}{2a(a-2)}$, $x>\frac{1}{2a}$.
2) При $a=0$ данное неравенство примет вид: $0\cdot x>-2$, что верно при $x\in R$.
3) При $0<a<2$ $2a(a-2)<0$, данное неравенство преобразуется к виду: $x<\frac{a-2}{2a(a-2)}$, $x<\frac{1}{2a}$.
4) При $a=2$ данное неравенство примет вид: $0\cdot x>0$, что не выполняется ни при каких значениях x.
5) При $a>2$ $2a(a-2)>0$ и $x>\frac{1}{2a}$.

Ответ. При $a<0,\ a>2$ $x>\frac{1}{2a};$
при $a=0$ $x\in R;$
при $0<a<2$ $x<\frac{1}{2a};$
при $a=2$ решений нет.

Пример 5. Решите неравенство: $(a-1)x^2 + 2(2a+1)x + (4a+3) \le 0.$

Решение.

Первое контрольное значение параметра: $a=1$.

Для нахождения второго контрольного значения параметра а найдем значение $\frac{D}{4}$:

$\frac{D}{4}=(2a+1)^2-(a-1)(4a+3)=5a+4.$

$\frac{D}{4}=0$ *при* $a=-\frac{4}{5}$.

Данное неравенство рассмотрим в каждом из пяти случаев: 1) $a<-\frac{4}{5}$; 2) $a=-\frac{4}{5}$;

3) $-\frac{4}{5}<a<1$; 4) $a=1$; 5) $a>1$.

1) При $a<-\frac{4}{5}$ $\frac{D}{4}<0$, а–1<0, т.е. данное неравенство верно при $x\in R$.

2) При $a=-\frac{4}{5}$ данное неравенство примет вид: $-\frac{9}{5}x^2-\frac{6}{5}x-\frac{1}{5}\le 0,$
$$9x^2+6x+1\ge 0,$$
$$(3x+1)^2\ge 0.$$
Полученное неравенство верно при $x\in R$.

3) При $-\frac{4}{5} < a < 1$ $\frac{D}{4}>0$. Вычислив корни квадратного трехчлена:

$x_1=\frac{-(2a+1)+\sqrt{5a+4}}{a-1}$; $x_2=\frac{-(2a+1)-\sqrt{5a+4}}{a-1}$, преобразуем данное неравенство к виду: $(a-1)(x-x_1)(x-x_2) \le 0$, $a-1<0$,

$(x-x_1)(x-x_2) \ge 0$. (1)

Очевидно, что:

$-(2a+1)+\sqrt{5a+4} > -(2a+1)-\sqrt{5a+4}$.

Разделим обе части этого неравенства на число $(a-1)<0$:

$\frac{-(2a+1)+\sqrt{5a+4}}{a-1} < \frac{-(2a+1)-\sqrt{5a+4}}{a-1}$, т.е. $x_1<x_2$.

Решение неравенства (1):

$x\in(-\infty;x_1]\cup[x_2;\infty)$.

4) При $a=1$ данное неравенство примет вид: $6x+7\le 0$, т.е. $x \le -\frac{7}{6}$.

5) При $a>1$ $\frac{D}{4}>0$ и данное неравенство преобразуется к виду: $(a-1)(x-x_1)(x-x_2)\le 0$,

где $x_1=\frac{-(2a+1)+\sqrt{5a+4}}{a-1}$, $x_2=\frac{-(2a+1)-\sqrt{5a+4}}{a-1}$.

Учитывая, что $a-1>0$, получим:

$(x-x_1)(x-x_2)\le 0$ и $\frac{-(2a+1)+\sqrt{5a+4}}{a-1} > \frac{-(2a+1)-\sqrt{5a+4}}{a-1}$, т.е. $x_1>x_2$.

Решение данного неравенства в этом случае имеет вид: $x_2\le x \le x_1$.

Ответ. При $a \le -\frac{4}{5}$ $x\in R$;

при $-\frac{4}{5}<a<1$ $x \in (-\infty;x_1]\cup[x_2;\infty)$;

при $a=1$ $x \in (-\infty;-\frac{7}{6}]$;

при $a>1$ $x \in [x_2;x_1]$, где $x_1=\frac{-(2a+1)+\sqrt{5a+4}}{a-1}$, $x_2=\frac{-(2a+1)-\sqrt{5a+4}}{a-1}$.

Пример 6. Решите неравенство $\frac{x^2+1}{a^2x-2a}-\frac{1}{2-ax}>\frac{x}{a}$.

Решение.

Заменим данное неравенство равносильными: $\frac{x^2+1}{a(ax-2)}+\frac{1}{ax-2}-\frac{x}{a}>0$,

$$\frac{(1-a)x^2+2x+1+a}{a^2(x-\frac{2}{a})}>0. \quad (1)$$

Первое контрольное значение параметра: $a=0$.
Найдем второе контрольное значение параметра: $1-a=0$, $a=1$.
Другие контрольное значение параметра найдем из условия: $D=0$.
(D –дискриминант квадратного трехчлена $(1-a)x^2+2x+1+a$).
$D=a^2$, $D=0$ при $a=0$. Такое контрольное значение параметра уже отмечено.
Рассмотрим решение неравенства (1) в каждом из трех случаев: 1) $a=1$; 2) $a=0$;

3) $\begin{cases} a \neq 0, \\ a \neq 1. \end{cases}$

1) При $a=1$ неравенство (1) примет вид:

$\frac{2x+2}{x-2} > 0,\ x \in (-\infty; -1) \cup (2; \infty).$

2) При $a=0$ неравенство (1) не имеет решений.

3) При $\begin{cases} a \neq 0, \\ a \neq 1 \end{cases}$ преобразуем неравенство (1) к виду:

$$\frac{(1-a)(x+1)(x-\frac{a+1}{a-1})}{x-\frac{2}{a}} > 0. \qquad (2)$$

Полученное неравенство равносильно неравенству (1), а значит, и данному неравенству.

Неравенство (2) рассмотрим в двух случаях:

1) $\begin{cases} a \neq 0, \\ a < 1 \end{cases}$ 2) $a > 1.$

1) При $\begin{cases} a \neq 0, \\ a < 1 \end{cases}$ $1-a > 0$ и неравенство (2) примет вид:

$$\frac{(x+1)(x-\frac{a+1}{a-1})}{x-\frac{2}{a}} > 0. \qquad (3)$$

2) При $a > 1$ $1-a < 0$ и неравенство (2) примет вид:

$$\frac{(x+1)(x-\frac{a+1}{a-1})}{x-\frac{2}{a}} < 0. \qquad (4)$$

Для решения неравенств (3) и (4) методом интервалов расположим числа $-1;\ \frac{a+1}{a-1};\ \frac{2}{a}$ в порядке возрастания. Для этого составим разности:

$A_1 = \frac{a+1}{a-1} - (-1);\ \ A_2 = \frac{2}{a} - (-1);\ \ A_3 = \frac{a+1}{a-1} - \frac{2}{a}.$

Рассмотрим знак разности $A_1 = \frac{2a}{a-1}$:

при $a<0$ $A_1>0$, при $0<a<1$ $A_1<0$, при $a>1$ $A_1>0.$

Аналогично $A_2 = \frac{2+a}{a}$:

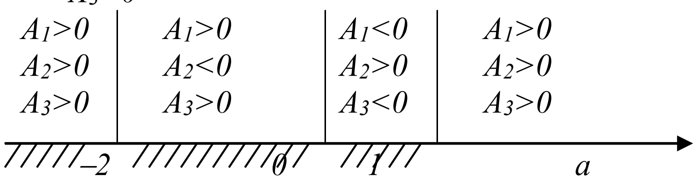
при $a<-2$ $A_2>0$; при $-2<a<0$ $A_2<0;$ при $0<a<1,\ a>1$ $A_2>0;$ при $a=-2$ $A_2=0.$

Рассмотрим разность $A_3 = \frac{a^2-a+2}{a(a-1)}.$

Дискриминант квадратного трехчлена a^2-a+2 отрицателен, а коэффициент при a^2 положителен, тогда $a^2-a+2>0$ при любых значениях а и знак A_3 зависит от знака знаменателя $a(a-1).$ При $a<0$ $A_3>0$; при $0<a<1$ $A_3<0$; при $a>0$ $A_3>0.$
Представим в виде схемы результаты исследования знаков разностей в зависимости от значения параметра а:

$A_2=0$
$A_3>0$

$A_1>0$ $A_2>0$ $A_3>0$	$A_1>0$ $A_2<0$ $A_3>0$	$A_1<0$ $A_2>0$ $A_3<0$	$A_1>0$ $A_2>0$ $A_3>0$



Неравенство (3) решается при условии $a\neq 0$, $a<1$. Поэтому нужно рассмотреть неравенство (3) в каждом из четырех случаев: 1) $a<-2$; 2) $-2<a<0$; 3) $0<a<1$; 4) $a=-2$.

В случаях (1) – (3) получаем соответственно: $-1<\frac{2}{a}<\frac{a+1}{a-1}$; $\frac{2}{a}<-1<\frac{a+1}{a-1}$; $\frac{a+1}{a-1}<-1<\frac{2}{a}$.

Решая неравенство (3) методом интервалов, получаем:

при $a<-2$ $x\in(-1;\ \frac{2}{a})\cup(\frac{a+1}{a-1};\infty)$;

при $-2<a<0$ $x\in(\frac{2}{a};-1)\cup(\frac{a+1}{a-1};\infty)$;

при $0<a<1$ $x\in(\frac{a+1}{a-1};-1)\cup(\frac{2}{a};\infty)$.

4) При $a=-2$ неравенство (3) примет вид:

$$\frac{(x+1)(x+\frac{1}{3})}{x+1}>0,\ \ x\in(-\frac{1}{3};\infty).$$

При решении неравенства (4), учитывая знаки разностей A_1, A_2, A_3 при $a>1$ (см. графическую иллюстрацию), имеем: $-1<\frac{2}{a}<\frac{a+1}{a-1}$.

С помощью метода интервалов находим решение неравенства (4): $x\in(-\infty;-1)\cup(\frac{2}{a};\frac{a+1}{a-1})$.

Ответ. При $a<-2$ $x\in(-1;\ \frac{2}{a})\cup(\frac{a+1}{a-1};\infty)$;

при $a=-2$ $x\in(-\frac{1}{3};\infty)$;

при $-2<a<0$ $x\in(\frac{2}{a};-1)\cup(\frac{a+1}{a-1};\infty)$;

при $a=0$ решений нет;

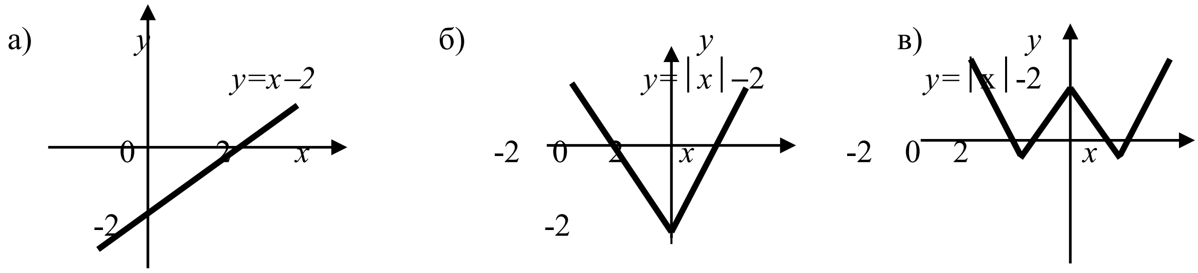
при $0<a<1$ $x\in(\frac{a+1}{a-1};-1)\cup(\frac{2}{a};\infty)$;

при $a=1$ $x\in(-\infty;-1)\cup(2;\infty)$;

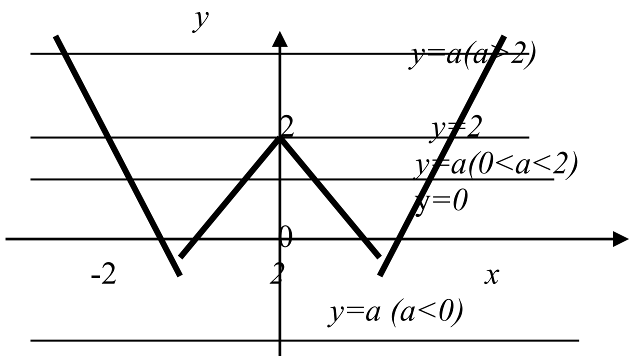
при $a>1$ $x\in(-\infty;-1)\cup(\frac{2}{a};\frac{a+1}{a-1})$.

Пример 7. Сколько корней имеет уравнение $||x|-2| = а$ при различных значениях параметра *а* ?

Решение. Построим график функции $y = ||x|-2|$.



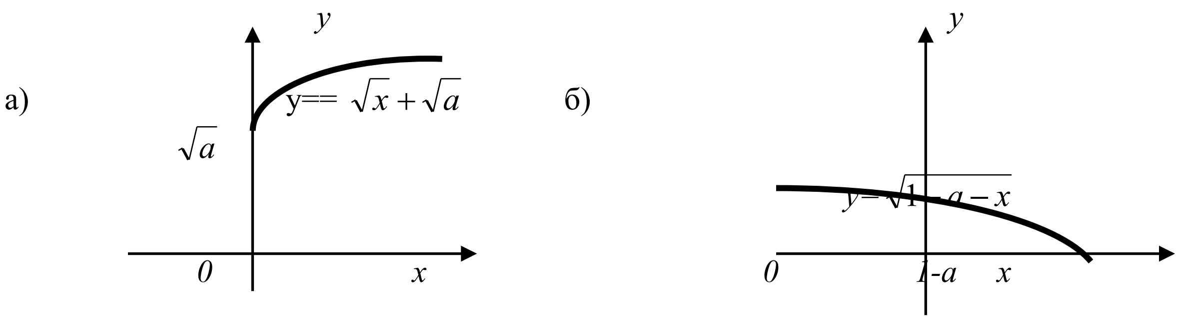
Прямая *y = a* не пересекает график (в) при *а <0 ,*
имеет с ним две точки пересечения при $a = 0 : x_1=2; x_2= -2;$
имеет четыре точки пересечения при 0 <*a<2;*
имеет три точки пересечения при *а =2;*
имеет две точки пересечения при *а >2* (рисунок г).

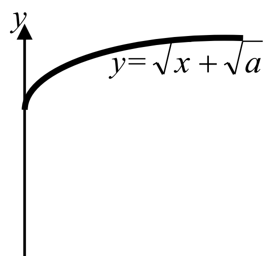


Ответ. При *а*< 0 корней нет ;
при *а*= 0 уравнение имеет два корня;
при *а=2* три корня;
при *0<a<2* четыре корня.

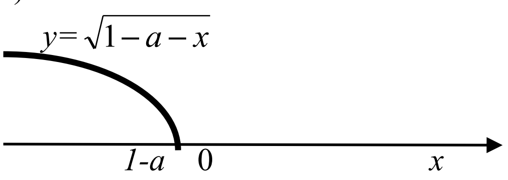
Пример2. Решите уравнение : $\sqrt{x} + \sqrt{a} = \sqrt{1-(x+a)}$.

Решение. Построим графики функций $y = \sqrt{x} + \sqrt{a}$ (1) и $y = \sqrt{1-(x+a)}$ (2):

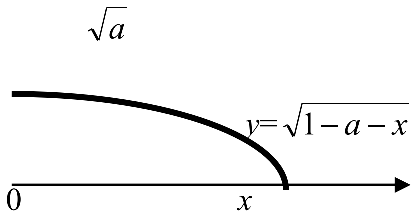




в)



г)



Данное уравнение не имеет корней, если графики функций (1) и (2) не пересекаются. Это происходит при $a<0$, т.к. функция (1) не определена; при $a\geq1$ (график функции (2) соответствует рисунку (в)) графики функций расположены в разных координатных четвертях, а также в том случае, когда точка пересечения графика функции (2) с осью y (эта точка существует при $a\leq1$) лежит ниже точки $\sqrt{a}$ на оси у (рис. г). График функции у = $\sqrt{1-a-x}$ пересекает ось у в точке $\sqrt{1-a}$. Значит, уравнение не имеет корней при

$$\sqrt{1-a} < \sqrt{a}, \text{ т.е.}$$

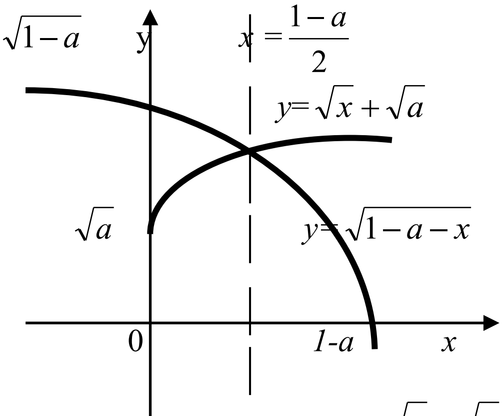
$$1-a < a,$$

$$a < \frac{1}{2}.$$

Учитывая, что в рассматриваемом случае а≤1, заключаем, что при $\frac{1}{2}<\pi$ а ≤1 данное уравнение также не имеет корней. Таким образом, уравнение не имеет корней, если $a<0$ или $a>\frac{1}{2}$;

если $0\leq a\leq\frac{1}{2}$, то уравнение имеет единственный корень (рис. (д)).

д)



Решая иррациональное уравнение $\sqrt{x}+\sqrt{a}=\sqrt{1-(x+a)}$, находим :

$x_1, x_2=\dfrac{1-a\pm\sqrt{2a-3a^2}}{2}$. Одно из найденных значений х не является корнем уравнения.

При $x=\dfrac{1-a}{2}$ функция $y=\sqrt{x}+\sqrt{a}$ принимает значение $\sqrt{\dfrac{1-a}{2}}+\sqrt{a}$; в той же точке функция $y=\sqrt{1-a-x}$ принимает значение $\sqrt{\dfrac{1-a}{2}}$. Значение второй функции меньше – значит, точка пересечения графиков этих функций расположена левее прямой $x=\dfrac{1-a}{2}$.

Таким образом, корнем данного уравнения является меньшее значение $x_1=$ $\dfrac{1-a-\sqrt{2a-3a^2}}{2}$, а

$x_2=\dfrac{1-a+\sqrt{2a-3a^2}}{2}$ не является корнем.

Ответ. При $a<0,\ a>\dfrac{1}{2}$ уравнение не имеет корней;

при $0\le a\le\dfrac{1}{2}$ $x=\dfrac{1-a-\sqrt{2a-3a^2}}{2}$.

Приложение 2. Задания для самостоятельной работы.

«Линейные уравнения с параметрами»

1. Решите уравнение: $a(a-3)x = 10(2a+x)$.

2. Решите уравнение : а) $\dfrac{x^2-4}{x-a}=0$; б) $\dfrac{ax-4-x}{x^2-9}=0$.

«Квадратные уравнения с параметрами»

1. При каких значениях параметра a сумма квадратов корней уравнения $2x^2+2(a-1)x+2a^2-3=0$ будет наибольшей ?

2.Решите уравнение $x^2+4x-2|x-a|+2-a=0$.

«Линейные неравенства с параметрами»

Вариант – 1.

1. Найдите все положительные значения параметра а, при каждом из которых для любого числа из отрезка [–2;2] верно неравенство $|3x+a|x|-11|\ge 3$.

Вариант – 2.

1. Найдите все положительные значения параметра а, при каждом из которых множество решений неравенства $|ax+3|x|-5|<1$ содержит какой-нибудь отрезок длиной 10 и при этом содержится в некотором отрезке длиной 20.

«Квадратные неравенства с параметрами»

Вариант – 1.

1. При каких значениях параметра а неравенство $x^2-2ax+9>0$ выполняется при всех значениях x ?

2. При каких значениях параметра а неравенство $\dfrac{x-2a-1}{x-a}<0$ выполняется для всех значений х отрезка [1;2] ?

3. Найдите все значения параметра а, при которых множество решений неравенства $x(x-6)\le (a+3)(|x-3|-3)$ содержит число, равное сумме корней уравнения $x^2-4x+1=0$.

Вариант – 2.

1.При каких значениях параметра а неравенство $ax^2+2(a+1)x+2a+2\le 0$ выполняется при всех значениях x ?

2.При каких значениях параметра b неравенство $\dfrac{3b-1-x}{x+b}>0$ выполняется для всех значений х из отрезка [–1;3] ?

3.Найдите все значения параметра а, при которых множество решений неравенства $x(x-5)\le(2a+1)(|x-2{,}5|-2{,}5)$ содержит число, равное сумме кубов корней уравнения $x^2-5x+2=0$.

«Функционально-графический метод решения задач с параметрами»

1. Сколько корней имеет уравнение $\sqrt{4-x^2} = x + a$ при различных значениях параметра a ?
2. Решите уравнение $\sqrt{x} = x - a$.
3. При каких значениях параметра а число корней уравнения $\left|\,\left|x^2 - 2x\right| - 7\right| = a$ в четыре раза больше a ?
4. Найдите все значения параметра p , при которых уравнение $(2p+3)x^2 + (p+3)x+1=0$ имеет хотя бы один корень, и число различных корней этого уравнения равно числу различных корней уравнения $\dfrac{2x+1}{21-p} = \dfrac{1}{\sqrt{x-3}+3}$.

Приложение 3. Задания для итогового зачета по курсу.

1. Найдите число натуральных корней уравнения

   $|5x-x^2-8|+|x-9| = x^2-6x+17.$
2. При каких значениях параметра а корни уравнения $(a-2)x^2-2ax+a+3=0$ заключены в интервале (1;3) ?
3. При каких значениях параметра а в множестве решений неравенства $(x-1)(x-a)\le 0$ содержится пять целых чисел ?
4. Найдите все значения параметра а, при которых множество решений неравенства $x(x-4) \ge (a+2)(\left|x-2\right| -2)$ содержит все члены некоторой арифметической прогрессии со знаменателем 0,5, включающей как положительные, так и отрицательные члены.